MATHEMATIK · KLASSE 9 BIS 12 · ZINSRECHNUNG

Zinseszins: Übungsblatt

Selbst erstelltes Lernmaterial zum Lernvideo „Zinseszins einfach erklärt: warum früh sparen so stark wirkt“. Alle Zahlen sind erfunden. Rechenbeispiel, keine Anlageberatung: fester Zinssatz, einmal im Jahr gutgeschrieben, eine Einzahlung am Anfang, ohne Steuern, Gebühren und Inflation. Wir runden kaufmännisch auf Cent, manche Banken runden ab. Seite 1: Merkzettel, Seiten 2 und 3: Aufgaben, Seite 4: Lösungen.

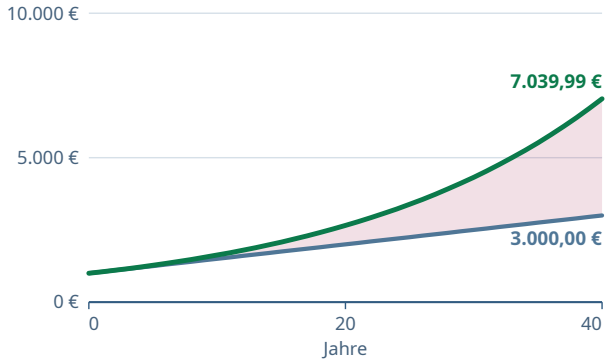
Name: _____ Datum: _____

Zinsen bekommen Zinsen: das Beispiel des Videos

1.000 € einmal angelegt, 5 % pro Jahr, jedes Jahr am Jahresende gutgeschrieben, danach nichts mehr eingezahlt oder abgehoben.

Jahr	Kapital zu Beginn	Zinsen (5 %)	Kapital am Ende
1	1.000,00 €	50,00 €	1.050,00 €
2	1.050,00 €	52,50 €	1.102,50 €
3	1.102,50 €	55,13 €	1.157,63 €
… vierzig Jahre …			
40	6.704,75 €	335,24 €	7.039,99 €

Im 2. Jahr sind es 52,50 € statt 50,00 €: Die 2,50 € mehr sind **Zinsen auf Zinsen**. Nach 40 Jahren: **Zinseszins 7.039,99 €**, **einfacher Zins 3.000,00 €**.



grün: Zinseszins · **blau: einfacher Zins**
Fläche: Zinsen auf Zinsen

Formel: $K_n = K_0 \cdot q^n$ mit dem **Zinsfaktor** $q = 1 + p/100$. Bei 5 % ist q = **1,05**, nicht 0,05. Zinsen insgesamt = $K_n - K_0$.
Einfacher Zins (nur K_0 wird verzinst): $K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot p/100)$, eine Gerade.
Rückwärts: $K_0 = K_n : q^n$; $n = \ln(K_n / K_0) / \ln q$; $q = (K_n / K_0)^{1/n}$, daraus $p = (q - 1) \cdot 100$.

72er-Regel (Faustformel, nur eine Näherung): Verdopplungszeit ≈ 72 : p Jahre. Bei 5 % sagt sie 14,4 Jahre, genau sind es ln 2 / ln 1,05 ≈ 14,21 Jahre. **Früh gegen spät:** Halbe Zeit ist nicht halbes Geld: Wer bei 5 % nur 20 statt 40 Jahre spart, hat 37,7 % vom Endkapital und nur gut ein Viertel der Zinsen (27,4 %).

Die sechs Fallen

Nr.	Falle	So geht es richtig
1	q = 0,05 statt 1,05	Das Kapital bleibt auf dem Konto: q = 1 + p/100.
2	Linear gerechnet (K_0 + n · Jahreszinsen)	Zinsen werden mitverzinst: $K_0 \cdot q^n$, eine Kurve statt einer Geraden.
3	Alter statt Laufzeit n eingesetzt	n = Endalter − Anfangsalter.
4	Zinsen statt Endkapital angegeben (oder umgekehrt)	Endkapital = K_0 + Zinsen, Zinsen = $K_n - K_0$.
5	Prozent nicht durch 100 geteilt (q = 1 + 5)	5 % = 0,05, also q = 1,05.
6	„Halbe Zeit gleich halbes Geld“	Das Wachstum ist exponentiell: Die späten Jahre bringen mehr als die frühen.

Aufgaben A bis D: rechnen

Runde auf zwei Nachkommastellen (Cent). Mehr Aufgaben mit Sofort-Korrektur gibt es auf der Übungsseite zum Video.

A. Endkapital und Zinsen

Deine Tante schenkt dir 500 € zur Konfirmation. Das Geld kommt einmal auf ein Konto. Der Zinssatz liegt fest bei 3 % pro Jahr, die Zinsen werden einmal jährlich am Jahresende gutgeschrieben. Danach zahlst du nichts mehr ein und hebst nichts ab. Das Geld bleibt 10 Jahre liegen. Wie hoch ist das Endkapital?

Zinsfaktor q	
Endkapital $K_{10} = K_0 \cdot q^{10}$	
Zinsen insgesamt	
Zum Vergleich: Endkapital bei einfachem Zins	

B. Einfacher Zins gegen Zinseszins

Zwei Konten starten mit je 2.000 € und zahlen 4 % Zinsen pro Jahr, jeweils 15 Jahre lang. Bei Konto A werden die Zinsen nicht mitverzinst: Jedes Jahr kommen die Zinsen auf das Anfangskapital dazu (einfacher Zins). Bei Konto B werden die Zinsen gutgeschrieben und im nächsten Jahr mitverzinst (Zinseszins). Es gibt keine weitere Ein- oder Auszahlung.

Endkapital Konto A (einfacher Zins)	
Endkapital Konto B (Zinseszins)	
Unterschied zwischen B und A	

Was bedeutet dieser Unterschied? Antworte in einem Satz.

C. Verdopplung und die 72er-Regel

Aus deinem Ferienjob bleiben 800 € übrig. Du zahlst sie einmal auf ein Konto ein. Der Zinssatz liegt fest bei 6 % pro Jahr, die Zinsen werden einmal jährlich am Jahresende gutgeschrieben. Danach zahlst du nichts mehr ein und hebst nichts ab. Nach wie vielen Jahren hat sich das Geld ungefähr verdoppelt?

Verdopplungszeit nach der 72er-Regel (eine Nachkommastelle)	
Verdopplungszeit genau: t = ln 2 / ln q (eine Nachkommastelle)	
Kontostand im ersten vollen Jahr, in dem mindestens das Doppelte (1.600,00 €) dasteht	

Warum ist die 72er-Regel nur eine Näherung? Antworte in einem Satz.

D. Rückwärts rechnen

Auf einem Konto mit 3 % Zinsen pro Jahr (einmal jährlich gutgeschrieben) sollen nach 20 Jahren genau 1.806,11 € stehen. Du zahlst einmal ein und danach nichts mehr. Wie viel musst du heute einzahlen? Und: Nach wie vielen vollen Jahren sind aus 1.000 € bei 3 % mindestens 1.500 € geworden?

Zinsfaktor q	
Anfangskapital $K_0 = K_n : q^n$	
Laufzeit in vollen Jahren (Hinweis: $n = \ln(K_n / K_0) / \ln q$, dann aufrunden)	

Aufgaben E bis G: verstehen

E. Früh gegen spät: Mia und Tom

Mia legt mit 25 Jahren einmal 800 € an, Tom legt mit 40 Jahren einmal 800 € an. Beide Konten haben 6 % Zinsen pro Jahr, jährlich gutgeschrieben, ohne weitere Ein- oder Auszahlung. Mit 55 Jahren schauen beide nach.

Mias Endkapital	
Toms Endkapital	
Tom in Prozent von Mia (eine Nachkommastelle)	
Preis des späten Starts: So viel mal so viel müsste Tom einzahlen (Mias durch Toms Endkapital, zwei Nachkommastellen)	

F. Fehler finden

Ein Lösungszettel zu: 1.000 € einmal angelegt, 5 % pro Jahr. Finde die Fehler und korrigiere sie. Eine Aussage stimmt.

Behauptung	**Richtig oder falsch? Korrektur:**
„Der Zinsfaktor ist q = 0,05.“	
„Nach 20 Jahren sind es 1.000 € + 20 · 50 € = 2.000 €. Mehr wächst das Geld nicht.“	
„Ich habe mit 20 angelegt und mit 40 nachgeschaut, also ist n = 40.“	
„Die Zinsen betragen 2.653,30 €.“	
„Es ist q = 1 + 5 = 6, also K_{20} = 1.000 € · 6^{20}.“	
„Wer 10 statt 20 Jahre spart, hat halb so viel Geld.“	
„Nach 14 Jahren sind es 1.979,93 €, fast das Doppelte.“	

G. Richtig oder falsch?

Aussage	**richtig**	**falsch**
Bei Zinseszins sind die Zinsen im zweiten Jahr größer als im ersten (fester Zinssatz, keine Entnahme).	☐	☐
Beim einfachen Zins kommt jedes Jahr derselbe Betrag dazu.	☐	☐
Der Zinsfaktor bei 4 % ist 0,04.	☐	☐
Die 72er-Regel liefert immer die exakte Verdopplungszeit.	☐	☐
Bei 5 % hat man nach 20 Jahren weniger als die Hälfte von dem, was nach 40 Jahren dasteht.	☐	☐
Nach genau einem Jahr ergeben einfacher Zins und Zinseszins dasselbe Endkapital.	☐	☐
Bei 6 % steht nach 12 Jahren etwas mehr als das Doppelte auf dem Konto.	☐	☐

Lösungen

Alle Zahlen stammen aus demselben Rechenkern wie die interaktive Übungsseite und sind unabhängig nachgerechnet.

A. Zinsfaktor: $q = 1 + p/100 = 1 + 3/100 = 1{,}03$. Endkapital: $K_n = K_0 \cdot q^n = 500{,}00\ € \cdot 1{,}03^{10} = 671{,}96\ €$ ($q^{10} \approx 1{,}3439$). Zum Vergleich mit einfachem Zins: $500{,}00\ € + 10 \cdot 15{,}00\ € = 650{,}00\ €$. Der Rest sind Zinsen auf Zinsen. Zinsen insgesamt: $K_n - K_0 = 671{,}96\ € - 500{,}00\ € = 171{,}96\ €$.

B. Einfacher Zins: Jedes Jahr kommen 4 % von 2.000,00 € = 80,00 € dazu. Nach 15 Jahren: 2.000,00 € + 15 · 80,00 € = 3.200,00 €. Zinseszins: $q = 1 + 4/100 = 1{,}04$, $K_n = K_0 \cdot q^n = 2.000{,}00\ € \cdot 1{,}04^{15} = 3.601{,}89\ €$ ($q^{15} \approx 1{,}8009$). Unterschied: 3.601,89 € − 3.200,00 € = 401,89 €. Das sind die Zinsen auf Zinsen. Das ist der Zinseszins: Die Zinsen des Vorjahres werden im nächsten Jahr mitverzinst, beim einfachen Zins nicht.

C. 72er-Regel (nur eine Faustformel): 72 : 6 = 12 Jahre, gerundet 12,0 Jahre. Genau: Aus $K_0 \cdot q^t = 2 \cdot K_0$ folgt $q^t = 2$, also $t = \ln 2 / \ln 1{,}06 \approx 11{,}90$ Jahre, gerundet 11,9 Jahre. Volle Jahre: Nach 11 Jahren sind es 1.518,64 € (noch nicht das Doppelte von 1.600,00 €), nach 12 Jahren 1.609,76 €. Einfacher Zins zum Vergleich: Das Geld verdoppelt sich erst nach 100 : 6 = 16,7 Jahren. Die 72er-Regel ist eine Faustformel: Sie kommt aus einer Näherung des Logarithmus und stimmt nur ungefähr (hier 12,00 gegen 11,90 Jahre).

D. Zinsfaktor: $q = 1 + 3/100 = 1{,}03$. Aus $K_n = K_0 \cdot q^n$ folgt $K_0 = K_n : q^n = 1.806{,}11\ € : 1{,}03^{20}$ ($q^{20} \approx 1{,}8061$) = 1.000,00 €. Laufzeit: $n = \ln(1.500 / 1.000) / \ln 1{,}03 = \ln 1{,}5 / \ln 1{,}03 \approx 13{,}72$ Jahre, aufgerundet **14 Jahre**: Nach 13 Jahren sind es 1.468,53 € (zu wenig), nach 14 Jahren 1.512,59 €.

E. Laufzeiten: Mia 55 − 25 = 30 Jahre, Tom 55 − 40 = 15 Jahre. Zinsfaktor $q = 1{,}06$. Mia: $K_n = K_0 \cdot q^n = 800{,}00\ € \cdot 1{,}06^{30} = 4.594{,}79\ €$. Tom: $K_n = K_0 \cdot q^n = 800{,}00\ € \cdot 1{,}06^{15} = 1.917{,}25\ €$. Tom in Prozent von Mia: 1.917,25 € : 4.594,79 € = 41,7 %. In beiden Endbeträgen steckt die Einzahlung von 800,00 €, deshalb zeigt der Vergleich der Zinsen den Unterschied besser: Tom 1.117,25 € gegen Mia 3.794,79 € = 29,4 %, weniger als die Hälfte, obwohl Tom halb so lange spart. Preis des späten Starts: Tom müsste das 2,40-Fache einzahlen ($q^{15} \approx 2{,}3966$), also 1.917,25 € statt 800,00 €, um mit seiner kürzeren Laufzeit auf Mias 4.594,79 € zu kommen.

F. (1) Falsch: $q = 1 + p/100 = 1{,}05$, denn das Kapital bleibt auf dem Konto. (2) Falsch: Das ist einfacher Zins. Mit Zinseszins sind es $1.000\ € \cdot 1{,}05^{20} = 2.653{,}30\ €$. (3) Falsch: n = 40 − 20 = 20 Jahre, nicht das Alter. (4) Falsch: 2.653,30 € ist das Endkapital. Die Zinsen sind 2.653,30 € − 1.000,00 € = 1.653,30 €. (5) Falsch: Die Prozentzahl muss durch 100 geteilt werden: 5 % = 0,05, also $q = 1{,}05$ und $K_{20} = 2.653{,}30\ €$. (6) Falsch: Nach 10 Jahren sind es 1.628,89 €, das sind 61,4 % von 2.653,30 €, mehr als die Hälfte. Die Idee „halbe Zeit gleich halbes Geld“ stimmt höchstens für die Zinsen beim einfachen Zins. (7) Richtig: $1.000\ € \cdot 1{,}05^{14} = 1.979{,}93\ €$.

G. 1 richtig (die Zinsen wachsen mit dem Kapital). 2 richtig. 3 falsch ($q = 1{,}04$). 4 falsch (nur eine Näherung). 5 richtig, aber nur wegen der Zahlen: Bei 5 % haben 20 gegen 40 Jahre 37,7 % (2.653,30 € gegen 7.039,99 €), also weniger als die Hälfte. 6 richtig: Nach einem Jahr kommen bei beiden nur die Zinsen auf K_0 dazu. 7 richtig: $1{,}06^{12} \approx 2{,}0122$, also etwas mehr als das Doppelte.