Sparplan und Inflation: Übungsblatt

Selbst erstelltes Lernmaterial zum Lernvideo „Zinseszins Teil 2: Sparplan und Inflation“. Alle Zahlen sind erfunden. Rechenbeispiel, keine Anlageberatung: fester Zinssatz pro Jahr (effektiv), Sparrate am Ende jedes Monats, feste Inflation, ohne Steuern und Gebühren.

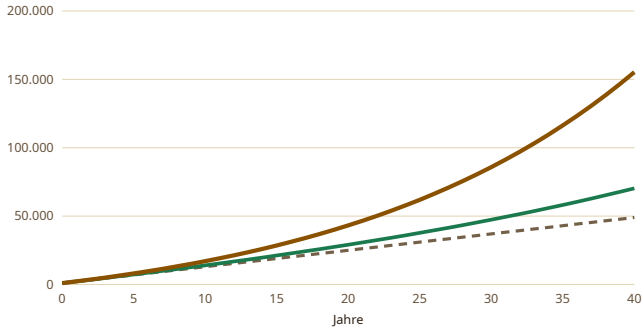
Name: _____ Datum: _____

Das Beispiel des Videos

Weg A: 1.000 € einmal. Weg B: 1.000 € Start und 100 € am Ende jedes Monats. 5 % pro Jahr effektiv, 40 Jahre, Inflation 2 % pro Jahr.

Jahr	Konto	eingezahlt	Kaufkraft heute
10	17.065,21 €	13.000,00 €	13.999,42 €
20	43.233,75 €	25.000,00 €	29.095,07 €
30	85.859,53 €	37.000,00 €	47.400,55 €
40	155.292,45 €	49.000,00 €	70.330,46 €

Nach 40 Jahren: **Konto 155.292,45 €** bei 49.000,00 € eingezahlt. Der Preisfaktor ist 2,2080, die **Kaufkraft von heute 70.330,46 €**. Sparstrumpf: 22.191,63 €. Plus durch die Zinsen: 48.138,83 €. Realzins 2,94 %.



braun: Konto · **grün: Kaufkraft von heute** · gestrichelt: nur eingezahlt

Monatsfaktor: qm = $q^{1/12}$ mit q = 1 + p/100 (zwölfte Wurzel). Bei 5 % ist qm = 1,004074, **nicht** 1 + 5/12.
Endwert der Raten (am Monatsende, N = 12 · n Raten): **R · (qm^N − 1) / (qm − 1)**. **Start:** $K_0 \cdot q^n$. **Endkapital** = Start + Raten.
Preisfaktor: $(1 + i/100)^n$. **Kaufkraft von heute** = Betrag : Preisfaktor. **Realzins:** r = (1 + p/100) : (1 + i/100) − 1.

Sparstrumpf: dieselben Einzahlungen ohne Zinsen. Was die Zinsen bringen: (Endkapital − Eingezahltes) : Preisfaktor, ein Betrag in Kaufkraft von heute.

Die acht Fallen

Nr.	Falle	So geht es richtig
1	5 % : 12 als Monatszins	qm = 1,05^(1/12), zwölfte Wurzel; 5 % : 12 ergäbe 5,12 % im Jahr.
2	Nur das Eingezahlte gerechnet	Jede Rate wird verzinst: Zinseszins nicht vergessen.
3	Rate wie einen Einmalbetrag aufgezinst (R · q^n)	Die Raten kommen nacheinander: Formel mit dem Bruch.
4	Inflation linear gerechnet (n · 2 %)	Preisfaktor $(1{,}02)^n$, jedes Jahr auf den schon gestiegenen Preis.
5	Nominalbetrag für die Kaufkraft gehalten	Betrag : Preisfaktor.
6	Realzins als Differenz p − i	(1 + p/100) : (1 + i/100) − 1; die Differenz ist nur eine Näherung.
7	Jahre statt Monate (hoch n statt hoch 12 · n)	Mit dem Monatsfaktor hoch N = 12 · n.
8	Startkapital vergessen	Start mit Zinseszins plus Endwert der Raten.

Aufgaben A bis D: rechnen

Runde auf zwei Nachkommastellen (Cent), den Monatsfaktor auf sechs. Mehr Aufgaben mit Sofort-Korrektur gibt es auf der Übungsseite zum Video.

A. Der Monatsfaktor

Ein Konto zahlt 4 % Zinsen pro Jahr effektiv: Nach einem Jahr ist das Geld genau um 4 % gewachsen. Welcher Faktor pro Monat führt, zwölfmal angewendet, genau dahin, und wie viel Prozent sind das pro Monat?

Monatsfaktor qm	
Monatszins in Prozent (%)	

B. Sparplan: Endkapital

Du sparst für ein Auto und überweist jeden Monat einen festen Betrag. Du zahlst am Ende jedes Monats 50 € ein, ohne Startkapital. Der Zinssatz beträgt 4 % pro Jahr effektiv (am Jahresende sind es genau so viele Prozent mehr), das Geld liegt 20 Jahre. Berechne den Monatsfaktor, den Endwert der Sparraten und das Endkapital insgesamt.

Monatsfaktor qm	
Endwert der Sparraten (€)	
Endkapital insgesamt (€)	

C. Weg A gegen Weg B

Weg A: Du legst 500 € einmal an. Weg B: Du legst dieselben 500 € an und zahlst zusätzlich am Ende jedes Monats 75 € ein. Der Zinssatz beträgt 6 % pro Jahr effektiv (am Jahresende sind es genau so viele Prozent mehr), das Geld liegt 25 Jahre. Wie groß sind die Endbeträge, und wievielmal so groß ist Weg B?

Endbetrag Weg A (einmal angelegt) (€)	
Endbetrag Weg B (mit Sparplan) (€)	
Weg B ist so viel mal so groß wie Weg A (×)	

Wie viel mehr hat Weg B insgesamt eingezahlt als Weg A? Warum ist der Endbetrag trotzdem nur so viel mal so groß?

D. Inflation: Kaufkraft von heute

Nach 30 Jahren stehen 40.000 € auf deinem Konto. Die Preise steigen in dieser Zeit jedes Jahr um 3 %. Wie stark sind die Preise insgesamt gestiegen (Preisfaktor), und wie viel ist das Geld in Euro von heute wert?

Preisfaktor nach n Jahren	
Kaufkraft von heute (€)	

Aufgaben E bis H: rechnen und verstehen

E. Sparstrumpf: was die Zinsen bringen

Mit dem ersten Gehalt startest du einen Sparplan. Du zahlst am Ende jedes Monats 150 € ein, zusätzlich zu 1.000 € Startkapital am Anfang. Der Zinssatz beträgt 3 % pro Jahr effektiv (am Jahresende sind es genau so viele Prozent mehr), das Geld liegt 30 Jahre. Die Preise steigen jedes Jahr um 2 %. Wie viel hast du eingezahlt, wie viel steht am Ende auf dem Konto, was ist das eingezahlte Geld im Sparstrumpf in Kaufkraft von heute wert, und wie viel Kaufkraft kommt durch die Zinsen dazu?

Insgesamt eingezahlt (€)	
Endkapital mit Zinsen (€)	
Sparstrumpf in Kaufkraft von heute (€)	
Plus durch die Zinsen in Kaufkraft von heute (€)	

F. Der Realzins

Ein Konto zahlt 6 % Zinsen pro Jahr, die Preise steigen um 2 % pro Jahr. Berechne den Realzins genau (nicht nur als Differenz) und die Kaufkraft von 1.000 € Startkapital nach 20 Jahren.

Realzins in Prozent (%)	
Kaufkraft von 1.000 € nach n Jahren bei diesem Realzins (€)	

G. Fehler finden

Ein Lösungszettel zu Sparplan und Inflation. Finde die Fehler und korrigiere sie. Eine Aussage stimmt.

Behauptung	Korrektur
„Der Monatsfaktor bei 6 % ist 1 + 6/12 = 1,005.“	
„100 € im Monat über 10 Jahre sind 12.000 € eingezahlt, also stehen am Ende 12.000 € auf dem Konto.“	
„Die erste Rate wird bis zum Ende genauso lange verzinst wie die letzte.“	
„Bei 2 % Inflation steigen die Preise in 30 Jahren um 30 · 2 % = 60 %.“	
„Nach 40 Jahren stehen 155.000 € auf dem Konto. Das ist auch in Euro von heute so viel wert.“	
„Der Realzins bei 5 % Zinsen und 2 % Inflation ist genau 3 %.“	
„Der Preisfaktor bei 3 % in 10 Jahren ist 1,03^10 ≈ 1,3439.“	

H. Richtig oder falsch?

Aussage	richtig	falsch
Wer früher mit dem Sparen beginnt, hat bei gleicher Rate am Ende meist mehr Zinsen.		
Der Monatsfaktor ist immer kleiner als der Jahresfaktor.		
Bei 0 % Zinsen ist das Endkapital eines Sparplans gleich dem Eingezahlten.		
Ist die Inflation so hoch wie der Zinssatz, bleibt die Kaufkraft eines Startkapitals gleich.		
Eine Kaufkraft von heute kann größer sein als der Betrag auf dem Konto, wenn die Preise steigen.		
Mit 5 % Zinsen und 2 % Inflation wächst das Startkapital in Kaufkraft von heute langsamer als im Konto.		

Lösungen

Alle Zahlen stammen aus demselben Rechenkern wie die interaktive Übungsseite und sind unabhängig nachgerechnet.

A. Jahresfaktor q = 1 + 4/100 = 1,04. Monatsfaktor qm = q^(1/12) = 1,003274 (zwölfte Wurzel, denn zwölfmal angewendet muss wieder q herauskommen). Monatszins = (qm − 1) · 100 = 0,327 %. Zum Vergleich: 4 % : 12 = 0,333 % wäre zu groß, denn es ergäbe 4,07 % im Jahr.

B. Monatsfaktor qm = (1 + 4/100)^(1/12) = 1,003274. Endwert der Raten = R · (qm^N − 1) / (qm − 1) mit R = 50 € und N = 12 · 20 = 240: 18.192,09 €. Start mit Zinseszins: 0 € · $1{,}04^{20}$ = 0,00 €. Endkapital insgesamt = 18.192,09 € + 0,00 € = 18.192,09 €.

C. Monatsfaktor qm = (1 + 6/100)^(1/12) = 1,004868. Endwert der Raten = R · (qm^N − 1) / (qm − 1) mit R = 75 € und N = 12 · 25 = 300: 50.721,67 €. Weg A: 500 € · $1{,}06^{25}$ = 2.145,94 €. Weg B: 2.145,94 € (Start mit Zinseszins) + 50.721,67 € (Raten) = 52.867,61 €. Verhältnis: 52.867,61 € : 2.145,94 € = 24,64. Eingezahlt hat Weg B dafür das 46-Fache. Weg B hat 22.500 € mehr eingezahlt (23.000 € gegen 500 €) und die Raten werden im Schnitt weniger lange verzinst als das Startkapital, deshalb wächst der Endbetrag nicht im gleichen Verhältnis.

D. Preisfaktor = (1 + 3/100)^30 = 2,4273 (nicht 1 + 30 · 3/100). Kaufkraft von heute = 40.000 € : 2,4273 = 16.479,47 €. Ein Euro von heute ist am Ende nur noch 41,2 % wert.

E. Monatsfaktor qm = (1 + 3/100)^(1/12) = 1,002466. Endwert der Raten = R · (qm^N − 1) / (qm − 1) mit R = 150 € und N = 12 · 30 = 360: 86.806,96 €. Eingezahlt = 1.000 € + 360 · 150 € = 55.000,00 €. Endkapital = 2.427,26 € + 86.806,96 € = 89.234,22 €. Preisfaktor = (1 + 2/100)^30 = 1,8114. Sparstrumpf in Kaufkraft von heute = 55.000,00 € : 1,8114 = 30.363,90 €. Plus durch die Zinsen = (89.234,22 € − 55.000,00 €) : 1,8114 = 18.899,72 €.

F. Realzins r = (1 + 6/100) : (1 + 2/100) − 1 = 3,92 % (nicht einfach 6 − 2 = 4 %). Kaufkraft von 1.000 € nach 20 Jahren = 1.000 € · $(1 + r/100)^{20}$ = 2.158,31 €.

G. (1) Falsch: qm = 1,06^(1/12) = 1,004868; 1 + 6/12 = 1,005 ergäbe über das Jahr 6,17 %. (2) Falsch: Die Zinsen fehlen; mit 5 % stehen nach 10 Jahren 15.436,32 € (Raten) auf dem Konto. (3) Falsch: Die erste Rate wird 119 Monate verzinst (bei 10 Jahren), die letzte gar nicht. (4) Falsch: Der Preisfaktor ist 1,02^30 = 1,8114, die Preise steigen um 81,1 %. (5) Falsch: Euro von heute: Endbetrag : Preisfaktor = 70.198,01 €. (6) Falsch: Exakt 2,94 %, die 3 % sind nur eine Näherung. (7) Richtig.

H. 1 richtig (die Raten sind länger verzinst). 2 richtig (zwölfte Wurzel von q ist kleiner als q, solange q > 1). 3 richtig. 4 richtig (Realzins 0 %). 5 falsch (die Kaufkraft ist wegen der steigenden Preise kleiner). 6 richtig (der Realzins ist kleiner als der Zinssatz).