Wahrscheinlichkeit beim Lotto: Übungsblatt

Zum Lernvideo „Wahrscheinlichkeit einfach erklärt: Warum beim Lotto keine Zahl fällig ist“. Die Geschichte vom Onkel und alle Beispielzahlen sind erfunden. Seite 1: Spickzettel und die Zahlen aus dem Video, Seiten 2 und 3: Aufgaben, Seite 4: Lösungen. Erst selbst versuchen! Erwartete Werte gelten immer im Schnitt, nie als sichere Zukunft.

Name: _____ Datum: _____

Der Spickzettel in vier Sätzen

1. **Gleich wahrscheinlich?** Sind alle Fälle gleich wahrscheinlich, gilt **günstige durch mögliche**. Beim Lotto: Denk dir alle 49 Kugeln in zufälliger Reihenfolge. Jeder der 49 Plätze ist für deine Zahl gleich wahrscheinlich, die ersten 6 werden gezogen. Also 6 von 49.
2. **Unabhängig.** Bei **unabhängigen Ziehungen** ändern frühere Ergebnisse die Chance für die nächste nicht. Vor jeder Ziehung liegen wieder alle Kugeln in der Trommel. „Fällig“ gibt es nicht. Vorher und nachher sind zwei verschiedene Fragen.
3. **Serie von vorne.** Eine ganze Serie rechnest du von vorne mit der **Pfadregel** (entlang des Pfades multiplizieren). „Mindestens einmal“ ist das **Gegenereignis**: 1 minus „keinmal“. Nicht die Einzelchancen addieren.
4. **Gesetz der großen Zahlen.** Es gilt für den **Anteil**, nicht für die Anzahl. Ein Rückstand muss nicht aufgeholt werden: In der Durchschnittsrechnung bleibt sein Betrag bestehen und sein Gewicht im Anteil wird kleiner. In einer tatsächlichen Folge kann er wachsen, verschwinden oder sich in einen Vorsprung verwandeln.

Prüffrage: Nicht „Was kam zuletzt?“, sondern **„Kommen die gezogenen Kugeln zurück?“** Zwischen zwei Ziehungen ja, dann bleibt die Chance gleich. Innerhalb einer Ziehung nein (ohne Zurücklegen), dann rechnest du mit dem, was noch in der Trommel liegt.

Die Zahlen aus dem Video

Fall	Rechnung (Lotto 6 aus 49, die 13 fehlt 40 Ziehungen lang)	Ergebnis
Chance je Ziehung	Die 13 ist unter den 6 gezogenen von 49: p = 6/49 ≈ 0,1224	**≈ 12,24 %**
Gegenereignis: keine 13	q = 1 − 6/49 = 43/49. Im Schnitt kommt die 13 alle 49/6 ≈ 8,17 Ziehungen.	**≈ 87,76 %**
Serie ohne 13 (Pfadregel)	n = 1: 43/49 ≈ 87,76 % · n = 2: $(43/49)^2$ ≈ 77,01 % · n = 3: $(43/49)^3$ ≈ 67,58 % · n = 10: (43/49)^10 ≈ 27,08 %	**n = 40: ≈ 0,54 %**
Mindestens einmal in 40, von vorne gerechnet	1 − (43/49)^40 ≈ 99,46 %. So war die Chance VOR den 40 Ziehungen.	**≈ 99,46 %**
Die nächste Ziehung nach der Lücke	Alle Kugeln kommen zurück: wieder p = 6/49. Nicht ≈ 0,54 %, nicht ≈ 99,46 %.	**≈ 12,24 %**
Mindestens einmal in den nächsten 8	1 − (43/49)^8. Nicht 8 · 6/49: Das zählt Mehrfachtreffer mehrfach.	**≈ 64,83 %**
Rückstand nach 40 leeren Ziehungen	40 · 6/49 Treffer im Schnitt erwartet, gekommen sind 0	**≈ 4,90 Treffer**
Anteil im Schnitt nach weiteren Ziehungen	Nach 100: ≈ 12,24 Treffer, Anteil ≈ 8,75 % · nach 1.000: ≈ 122,45 Treffer, ≈ 11,77 % · nach 4.000: ≈ 489,80 Treffer. Der Rückstand muss nicht aufgeholt werden: In der Durchschnittsrechnung bleibt sein Betrag, sein Gewicht im Anteil sinkt.	**≈ 12,12 %** nach 4.000 weiteren
Ohne Zurücklegen (innerhalb einer Ziehung)	Erste Kugel: 1/49. Waren die ersten 5 nicht die 13: Es liegen noch 44 Kugeln drin, also 1/44.	**≈ 2,04 %** und **≈ 2,27 %**
Jede einzelne Kombination	6 aus 49 Zahlen, auch 1, 2, 3, 4, 5, 6	**1 zu 13.983.816**
Skatblatt (ohne Zurücklegen)	32 Karten, 4 Asse: ein Ass hat 4/32 = 12,5 %. Wurden drei Asse gezogen und bleiben draußen, liegt unter den 29 übrigen Karten nur noch ein Ass: Unter dieser Bedingung ist die Chance 1/29.	**12,5 %**, danach **≈ 3,45 %**

Rechnen und runden: Rechne mit 43/49 statt mit dem gerundeten Wert 0,8776 weiter und runde erst am Ende auf zwei Nachkommastellen. Potenzen verstärken Rundungsfehler: Für mindestens einen Treffer in 8 Ziehungen erhältst du mit dem gerundeten Wert 0,8776 nur ≈ 64,81 % statt des richtigen Werts ≈ 64,83 %.

Aufgaben A und B: Die Lücke und die nächste Ziehung

Rechne in der Reihenfolge der Felder. Dieselben Aufgaben mit Sofort-Korrektur gibt es auf der Übungsseite zum Video (Nummern in Klammern). Prozentwerte auf zwei Nachkommastellen runden, mit ungerundeten Zwischenwerten rechnen. Die Kugeln kommen nach jeder Ziehung zurück.

A · Lotto 6 aus 49 (Zahlen aus dem Video) (Übungsseite: #lotto-video)

Beim Lotto 6 aus 49 liegen 49 Kugeln (1 bis 49) in der Trommel, gezogen werden 6. Vor jeder Ziehung liegen wieder alle Kugeln drin. Stell dir vor: Deine Zahl ist die 13. In den letzten 40 Ziehungen ist sie kein einziges Mal gekommen. Dein Onkel sagt: „Jetzt ist die 13 fällig!“

Kugeln in der Trommel (N)	**49**
gezogene Kugeln je Ziehung (k)	**6**
Deine Zahl	**13**
Ziehungen ohne Treffer (Lücke L)	**40**
nächste Ziehungen (n)	**8**
weitere Ziehungen für den Anteil (m)	**1.000**
Kugeln, die in Schritt 5 schon draußen sind (r)	**5**

1. Chance für deine Zahl in einer Ziehung		%
1. Keine Treffer in einer Ziehung		%
2. Keine Treffer in 40 Ziehungen hintereinander		%
2. Mindestens ein Treffer in diesen 40 Ziehungen, von vorne gerechnet		%
3. Chance für einen Treffer in der NÄCHSTEN Ziehung		%
3. Mindestens ein Treffer in den nächsten 8 Ziehungen		%
4. Rückstand: So viele Treffer waren in den 40 Ziehungen im Schnitt zu erwarten (gekommen sind 0)		Treffer
4. Erwarteter Anteil der Ziehungen mit Treffer, wenn 1.000 weitere Ziehungen im Schnitt normal laufen (alle 1.040 Ziehungen zusammen)		%
5. Chance für deine Zahl als ERSTE Kugel einer Ziehung		%
5. Chance für deine Zahl als 6. Kugel, wenn sie unter den ersten 5 Kugeln nicht war		%

B · Lostrommel im Vereinsheim (Übungsseite: #lotto-31)

Im Vereinsheim steht eine Trommel mit 20 Kugeln, nummeriert von 1 bis 20. Jeden Freitag werden 4 Kugeln gezogen. Danach kommen alle Kugeln zurück in die Trommel. Deine Zahl ist die 7. In den letzten 19 Ziehungen ist sie kein einziges Mal gekommen. Deine Trainerin sagt: „Jetzt ist die 7 fällig!“

Kugeln in der Trommel (N)	**20**
gezogene Kugeln je Ziehung (k)	**4**
Deine Zahl	**7**
Ziehungen ohne Treffer (Lücke L)	**19**
nächste Ziehungen (n)	**10**
weitere Ziehungen für den Anteil (m)	**120**
Kugeln, die in Schritt 5 schon draußen sind (r)	**2**

1. Chance für deine Zahl in einer Ziehung		%
1. Keine Treffer in einer Ziehung		%
2. Keine Treffer in 19 Ziehungen hintereinander		%
2. Mindestens ein Treffer in diesen 19 Ziehungen, von vorne gerechnet		%
3. Chance für einen Treffer in der NÄCHSTEN Ziehung		%
3. Mindestens ein Treffer in den nächsten 10 Ziehungen		%
4. Rückstand: So viele Treffer waren in den 19 Ziehungen im Schnitt zu erwarten (gekommen sind 0)		Treffer
4. Erwarteter Anteil der Ziehungen mit Treffer, wenn 120 weitere Ziehungen im Schnitt normal laufen (alle 139 Ziehungen zusammen)		%
5. Chance für deine Zahl als ERSTE Kugel einer Ziehung		%
5. Chance für deine Zahl als 3. Kugel, wenn sie unter den ersten 2 Kugeln nicht war		%

Aufgabe C bis E: Rechnen, Fehler finden, Urteilen

C · Bingo-Trommel im Gemeindehaus (Übungsseite: #lotto-14)

Im Gemeindehaus dreht sich bei jeder Spielrunde eine Trommel mit 69 Kugeln, nummeriert von 1 bis 69. In jeder Runde werden 8 Kugeln gezogen, danach kommen alle zurück. Deine Zahl ist die 13. In den letzten 29 Ziehungen ist sie kein einziges Mal gekommen. Dein Opa sagt: „Jetzt ist die 13 fällig!“

Kugeln in der Trommel (N)	**69**
gezogene Kugeln je Ziehung (k)	**8**
Deine Zahl	**13**
Ziehungen ohne Treffer (Lücke L)	**29**
nächste Ziehungen (n)	**9**
weitere Ziehungen für den Anteil (m)	**500**
Kugeln, die in Schritt 5 schon draußen sind (r)	**7**

1. Chance für deine Zahl in einer Ziehung		%
1. Keine Treffer in einer Ziehung		%
2. Keine Treffer in 29 Ziehungen hintereinander		%
2. Mindestens ein Treffer in diesen 29 Ziehungen, von vorne gerechnet		%
3. Chance für einen Treffer in der NÄCHSTEN Ziehung		%
3. Mindestens ein Treffer in den nächsten 9 Ziehungen		%
4. Rückstand: So viele Treffer waren in den 29 Ziehungen im Schnitt zu erwarten (gekommen sind 0)		Treffer
4. Erwarteter Anteil der Ziehungen mit Treffer, wenn 500 weitere Ziehungen im Schnitt normal laufen (alle 529 Ziehungen zusammen)		%
5. Chance für deine Zahl als ERSTE Kugel einer Ziehung		%
5. Chance für deine Zahl als 8. Kugel, wenn sie unter den ersten 7 Kugeln nicht war		%

D · Finde die zwei Fehler

Max rechnet: „Die 13 kam 40 Ziehungen lang nicht. Von vorne gerechnet war das nur zu etwa 0,54 % möglich, also ist sie überfällig. Das Gegenereignis sagt: In der nächsten Ziehung kommt sie mit etwa 99,46 %. Und in den nächsten 8 Ziehungen kommt sie mit 8 · 6/49 ≈ 0,98, also mit rund 98 % mindestens einmal.“

Fehler 1			
Fehler 2			
richtige Chance für die nächste Ziehung (%)		richtig: mindestens einmal in den nächsten 8 (%)	

E · Richtig oder falsch? (Kreuze an und begründe in einem Satz.)

Nr.	Aussage	Urteil	Begründung
1	Nach 40 Ziehungen ohne die 13 hat die 13 in der nächsten Ziehung eine höhere Chance als sonst.	☐ richtig ☐ falsch	
2	Beim Lotto 6 aus 49 ist die Kombination 1, 2, 3, 4, 5, 6 genauso wahrscheinlich wie jede andere.	☐ richtig ☐ falsch	
3	Das Gesetz der großen Zahlen besagt, dass sich ein Rückstand an Treffern später ausgleicht.	☐ richtig ☐ falsch	
4	Ist die gesuchte Kugel noch in der Trommel, steigt beim Ziehen ohne Zurücklegen nach jeder anderen gezogenen Kugel ihre Chance, als Nächstes gezogen zu werden.	☐ richtig ☐ falsch	
5	Wenn sich der Anteil der Treffer der Wahrscheinlichkeit nähert, muss auch der Abstand in Treffern kleiner werden.	☐ richtig ☐ falsch	

Gut zu wissen: Lotto spielen darf man erst ab 18 Jahren. Glücksspiel kann süchtig machen. Hilfe bei Glücksspielproblemen: BIÖG-Telefonberatung 0800 1 37 27 00, kostenfrei und anonym, check-dein-spiel.de. Dieses Blatt ist reines Lernmaterial zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und wirbt für kein Glücksspiel.

Lösungen

Alle Zahlen stammen aus demselben Rechenkern wie die interaktive Übungsseite und sind mit einer Rechenkontrolle geprüft. Erwartete Treffer und der Anteil nach weiteren Ziehungen sind Durchschnittsrechnungen: Eine echte Folge kann davon abweichen.

Aufgabe A · Lotto 6 aus 49

Feld	Ergebnis	Rechnung
1. Chance je Ziehung	**12,24 %**	p = 6/49 ≈ 12,24 %
1. Keine Treffer in einer Ziehung	**87,76 %**	1 − 6/49 = 43/49 ≈ 87,76 %
2. Serie ohne Treffer	**0,54 %**	(43/49)^40 ≈ 0,54 %
2. Mindestens ein Treffer, vorher	**99,46 %**	1 − (43/49)^40 ≈ 99,46 %
3. Nächste Ziehung	**12,24 %**	unverändert 6/49 ≈ 12,24 %
3. Mindestens ein Treffer, nachher	**64,83 %**	1 − (43/49)^8 ≈ 64,83 %
4. Rückstand	**4,90 Treffer**	40 · 6/49 ≈ 4,90 Treffer
4. Anteil nach weiteren Ziehungen	**11,77 %**	1.000 · 6/49 ≈ 122,45 Treffer; (1.000 · 6/49) / 1.040 ≈ 11,77 %
5. Erste Kugel	**2,04 %**	1/49 ≈ 2,04 %
5. 6. Kugel	**2,27 %**	1/(49 − 5) = 1/44 ≈ 2,27 %

Aufgabe B · Lostrommel im Vereinsheim

Feld	Ergebnis	Rechnung
1. Chance je Ziehung	**20 %**	p = 4/20 = 20 %
1. Keine Treffer in einer Ziehung	**80 %**	1 − 4/20 = 16/20 = 80 %
2. Serie ohne Treffer	**1,44 %**	(16/20)^19 ≈ 1,44 %
2. Mindestens ein Treffer, vorher	**98,56 %**	1 − (16/20)^19 ≈ 98,56 %
3. Nächste Ziehung	**20 %**	unverändert 4/20 = 20 %
3. Mindestens ein Treffer, nachher	**89,26 %**	1 − (16/20)^10 ≈ 89,26 %
4. Rückstand	**3,8 Treffer**	19 · 4/20 = 3,8 Treffer
4. Anteil nach weiteren Ziehungen	**17,27 %**	120 · 4/20 = 24 Treffer; (120 · 4/20) / 139 ≈ 17,27 %
5. Erste Kugel	**5 %**	1/20 = 5 %
5. 3. Kugel	**5,56 %**	1/(20 − 2) = 1/18 ≈ 5,56 %

Aufgabe C · Bingo-Trommel im Gemeindehaus

Feld	Ergebnis	Rechnung
1. Chance je Ziehung	**11,59 %**	p = 8/69 ≈ 11,59 %
1. Keine Treffer in einer Ziehung	**88,41 %**	1 − 8/69 = 61/69 ≈ 88,41 %
2. Serie ohne Treffer	**2,81 %**	(61/69)^29 ≈ 2,81 %
2. Mindestens ein Treffer, vorher	**97,19 %**	1 − (61/69)^29 ≈ 97,19 %
3. Nächste Ziehung	**11,59 %**	unverändert 8/69 ≈ 11,59 %
3. Mindestens ein Treffer, nachher	**67,01 %**	1 − (61/69)^9 ≈ 67,01 %
4. Rückstand	**3,36 Treffer**	29 · 8/69 ≈ 3,36 Treffer
4. Anteil nach weiteren Ziehungen	**10,96 %**	500 · 8/69 ≈ 57,97 Treffer; (500 · 8/69) / 529 ≈ 10,96 %
5. Erste Kugel	**1,45 %**	1/69 ≈ 1,45 %
5. 8. Kugel	**1,61 %**	1/(69 − 7) = 1/62 ≈ 1,61 %

Aufgaben D und E

D: Fehler 1: Die Serie ohne Treffer galt VOR den 40 Ziehungen, und auch „mindestens einmal in 40“ (etwa 99,46 %) war die Chance von vorne gerechnet. Die Ziehungen sind vorbei, und alle Kugeln kamen zurück: Für die nächste Ziehung gilt wieder 6/49 **≈ 12,24 %**. „Überfällig“ gibt es nicht. **Fehler 2:** 8 · 6/49 zählt die Einzelchancen zusammen und ergibt ≈ 0,98, also rund 98 %. Dabei werden Fälle mit mehreren Treffern mehrfach gezählt. Richtig ist das Gegenereignis: 1 − (43/49)^8 **≈ 64,83 %**.

E: 1) falsch. Die Chance bleibt 6/49 ≈ 12,24 %. Vor der nächsten Ziehung liegen wieder alle Kugeln in der Trommel, die Ziehungen sind unabhängig.
2) richtig. Jede einzelne Kombination hat die Chance 1 zu 13.983.816 (ohne Superzahl). Das Muster fällt nur uns auf, nicht den Kugeln.
3) falsch. Das Gesetz betrifft den Anteil: Er nähert sich auf lange Sicht der Wahrscheinlichkeit. Ein Rückstand an Treffern muss nicht aufgeholt werden.
4) richtig. Nach r anderen Kugeln beträgt die Chance 1/(N − r), zum Beispiel 1/49 für die erste Kugel und 1/44 für die sechste, wenn die ersten fünf nicht die gesuchte waren. Das gilt nur, solange die gesuchte Kugel noch in der Trommel liegt.
5) falsch. Der Anteil kann sich nähern, während der Abstand in Treffern wächst (die Streuung der Trefferzahl nimmt mit der Zahl der Ziehungen zu), verschwindet oder sich umkehrt. Das Gesetz sagt nur etwas über den Anteil.