MATHEMATIK · STUDIUM · ANALYSIS

Vollständige Induktion: Übungsblatt

Zum Lernvideo „Vollständige Induktion: Dominosteine statt Beweisangst“. Lea und alle Beispiele sind erfunden. Seiten 1 bis 3: Aufgaben, Seite 4: Lösungen.

Die Beweisschablone: vier Schritte

1. **Induktionsanfang:** Beweise die Aussage beim **Startwert** n_0 (oft 1, manchmal größer).
2. **Induktionsannahme:** Sie gilt für ein **beliebiges, festes** $k \geq n_0$. Das nimmst du *vorläufig* an.
3. **Induktionsschritt:** Zeige, dass sie dann auch für $k + 1$ gilt. Die Annahme darfst du dabei verwenden.
4. **Schluss:** „Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$.“

Dominobild: Der erste Stein fällt (Anfang) und jeder fallende Stein stößt seinen Nachfolger um (Schritt für jedes k). Der Schritt beweist nicht, dass Stein k fällt, sondern: *wenn* er fällt, *dann* auch der nächste.

Das Beispiel aus dem Video: 1 + 2 + … + n

Behauptung A(n): $1 + 2 + \ldots + n = n \cdot (n+1)/2$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

Test mit Zahlen (ein Test, kein Beweis):

n	1	2	3	4	5	10	100
1 + … + n	1	3	6	10	15	55	5 050
n·(n+1)/2	1	3	6	10	15	55	5 050

Induktionsanfang (n = 1): Links 1, rechts $1 \cdot 2/2 = 1$. Die Aussage stimmt: A(1) gilt.

Induktionsannahme: Für ein festes k gilt $1 + 2 + \ldots + k = k \cdot (k+1)/2$.

Zu zeigen (k + 1): $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = (k+1) \cdot (k+2)/2$

Rechnung (nach der Induktionsannahme wird die Summe bis k durch $k \cdot (k+1)/2$ ersetzt): $k \cdot (k+1)/2 + (k+1) = (k+1) \cdot (k/2 + 1) = (k+1) \cdot (k+2)/2$ (also genau die Behauptung für k + 1). Zahlenprobe (kein Beweis) mit k = 5: $15 + 6 = 21 = 6 \cdot 7/2$.

Schluss: Damit gilt A(n) für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

Aufgaben A bis D: Beweise Schritt für Schritt

Rechne zuerst den Anfang aus, schreibe dann die Behauptung für k + 1 auf und prüfe den Schritt mit dem angegebenen k. Mit der Beweisschablone von Seite 1 gelingt der Rest.

A · Summe der Produkte aufeinanderfolgender Zahlen

A(n): $1\cdot2 + 2\cdot3 + \ldots + n\cdot(n+1) = n\cdot(n+1)\cdot(n+2)/3$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$

1. Anfang (n = 1): links _____ rechts _____

2. Behauptung für k + 1 aufschreiben:

_____

3. Schritt mit k = 4:

Summe bis k = 4	neuer Summand (für k+1 = 5)	Summe bis k+1 = 5	rechte Seite der Formel für k+1 = 5

Zu zeigen ist die Umformung allgemein: _____

B · Summe der ersten n Quadratzahlen

A(n): $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)/6$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$

1. Anfang (n = 1): links _____ rechts _____

2. Behauptung für k + 1 aufschreiben:

_____

3. Schritt mit k = 3:

Summe bis k = 3	neuer Summand (für k+1 = 4)	Summe bis k+1 = 4	rechte Seite der Formel für k+1 = 4

Zu zeigen ist die Umformung allgemein: _____

C · Zweierpotenz gegen Quadrat

A(n): $2^n > n^2$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$

1. Anfang (n = 5): links _____ rechts _____

2. Behauptung für k + 1 aufschreiben:

_____

3. Schritt mit k = 12:

linke Seite für k = 12	rechte Seite für k = 12	linke Seite für k+1 = 13	rechte Seite für k+1 = 13

Zu zeigen ist die Umformung allgemein: _____

D · Geometrische Summe mit Zweierpotenzen

A(n): $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$

1. Anfang (n = 1): links _____ rechts _____

2. Behauptung für k + 1 aufschreiben:

_____

3. Schritt mit k = 5:

Summe bis k = 5	neuer Summand (für k+1 = 6)	Summe bis k+1 = 6	rechte Seite der Formel für k+1 = 6

Zu zeigen ist die Umformung allgemein: _____

Fallen aufspüren und selbst beweisen

E · Falle 1: Der Anfang fehlt

Behauptung A(n): n = n + 1 für alle natürlichen Zahlen n.
„Beweis“: Induktionsschritt: Angenommen k = k + 1. Addiere auf beiden Seiten 1. Dann gilt k + 1 = k + 2, also A(k + 1). Damit gilt A(n) für alle n.

Welcher Schritt der Schablone fehlt, und was ergibt die Probe bei n = 1?

F · Falle 2: Die Annahme

Behauptung: $1 + 2 + \ldots + n = n \cdot (n+1)/2$.
„Schritt“: Wir nehmen an, die Formel gilt für k + 1, also $1 + \ldots + (k+1) = (k+1) \cdot (k+2)/2$. Damit gilt die Formel für k + 1. Also ist der Induktionsschritt bewiesen.

Warum ist das kein Beweis? Was darfst du annehmen, und was musst du zeigen?

G · Startwert: 2^n gegen n^2

Berechne die Tabelle und kreuze an, wo die Aussage **$2^n > n^2$** stimmt. Ab welchem n gilt die Aussage lückenlos, und wo setzt du den Induktionsanfang?

n	1	2	3	4	5	6	7	8
2^n								
n^2								
$2^n > n^2$?								

Der Anfang liegt bei n = _____. Rechne dort: 2^n = _____ und n^2 = _____.

H · Beweise selbst: ungerade Zahlen

Behauptung: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

Anfang (n = 1): _____ Annahme: _____

Zu zeigen (k + 1): _____

Schluss: _____

Lösungen

Alle Zahlen stammen aus demselben Rechenkern wie die interaktive Übungsseite und sind mit exakter Arithmetik geprüft.

A (Summe der Produkte aufeinanderfolgender Zahlen): Anfang n = 1: 2 = 2. Behauptung: $1\cdot2 + \ldots + k\cdot(k+1) + (k+1)\cdot(k+2) = (k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)/3$. Schritt mit k = 4: 40 | 30 | 70 | 70. Umformung: $k\cdot(k+1)\cdot(k+2)/3 + (k+1)\cdot(k+2) = (k+1)\cdot(k+2)\cdot(k/3 + 1) = (k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)/3$. Schluss: Gilt für alle n ≥ 1.

B (Summe der ersten n Quadratzahlen): Anfang n = 1: 1 = 1. Behauptung: $1^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = (k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)/6$. Schritt mit k = 3: 14 | 16 | 30 | 30. Umformung: $k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)/6 + (k+1)^2 = (k+1)\cdot(k\cdot(2k+1) + 6(k+1))/6 = (k+1)\cdot(2k^2+7k+6)/6 = (k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)/6$. Schluss: Gilt für alle n ≥ 1.

C (Zweierpotenz gegen Quadrat): Anfang n = 5: 32 > 25. Behauptung: $2^{k+1} > (k+1)^2$. Schritt mit k = 12: 4 096 | 144 | 8 192 | 169. Umformung: Für k ≥ 5: $2^{k+1} = 2\cdot2^k > 2k^2 \geq (k+1)^2$, denn $k^2 \geq 2k + 1$ für k ≥ 3. Schluss: Gilt für alle n ≥ 5.

D (Geometrische Summe mit Zweierpotenzen): Anfang n = 1: 1 = 1. Behauptung: $1 + 2 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Schritt mit k = 5: 31 | 32 | 63 | 63. Umformung: $2^k - 1 + 2^k = 2\cdot2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$. Schluss: Gilt für alle n ≥ 1.

E: Es fehlt der **Induktionsanfang**. Bei n = 1 steht 1 = 2, das ist falsch. Der Schritt allein beweist die Behauptung für alle n nicht: Im Dominobild fehlt der Anstoß.

F: Hier wird A(k + 1) **vorausgesetzt** und als Ergebnis wieder behauptet: ein Zirkelschluss. Erlaubt ist, A(k) vorläufig anzunehmen und daraus A(k + 1) herzuleiten, so wie in der Rechnung auf Seite 1.

G: 1: 2 gegen 1 ja · 2: 4 gegen 4 nein · 3: 8 gegen 9 nein · 4: 16 gegen 16 nein · 5: 32 gegen 25 ja · 6: 64 gegen 36 ja · 7: 128 gegen 49 ja · 8: 256 gegen 64 ja. Für n = 2, 3, 4 stimmt es nicht (4 = 4, 8 < 9, 16 = 16); bei n = 1 gilt es ebenfalls, aber nicht lückenlos. Ab n = 5 stimmt es immer: Der Induktionsanfang liegt bei **n = 5** (32 > 25), der Schritt gilt für jedes k ≥ 5 ($2^{k+1} = 2\cdot2^k > 2k^2 \geq (k+1)^2$).

H: Anfang n = 1: $1 = 1^2$. Annahme: $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$. Zu zeigen: $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$. Rechnung: $k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. Schluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen n ≥ 1.